

## **Modelos y soluciones para la restauración de imágenes fuera de foco**

*La restauración de imágenes fuera de foco es un área de investigación crucial en el campo de las ciencias de datos y la visión por computadora. Esta tarea es esencial para mejorar la calidad de imágenes en diversas aplicaciones, desde la fotografía y videografía hasta la medicina y la vigilancia. El problema se dificulta cuando no se dispone de información sobre la cantidad de desenfoque, lo que hace necesario el desarrollo de métodos de resolución avanzados y robustos. El proyecto propuesto tiene como objetivo desarrollar modelos y algoritmos que permitan restaurar imágenes desenfocadas sin conocer a priori el operador de desenfoque.*

**Palabras clave:** Procesamiento de imágenes, mínimos cuadrados no lineales separables, problemas inversos

### Conocimientos deseables

*Buen manejo del lenguaje de programación Python y álgebra lineal.*

### ¿Qué podría aprender quien realice esta tesis?

*Quien participe en este proyecto tendrán la oportunidad de: 1) aprender y aplicar técnicas avanzadas de procesamiento de imágenes, optimización, y métodos numéricos para la solución de problemas inversos y 2) contribuir a la creación de soluciones prácticas que pueden tener un impacto significativo en múltiples industrias. Se estará sumando a un proyecto de investigación en desarrollo donde se proponen nuevos modelos y métodos iterativos de optimización para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales separables relacionados a problemas inversos donde los datos están contaminados con ruido. Aprenderá también a desarrollar e implementar algoritmos eficientes usando la transformada de Fourier.*

---

### Dirección de la tesis

*Jeronimo, Gabriela*  
*Departamento de Matemática, FCEN-UBA & IMAS, CONICET-UBA*

Contacto: [jeronimo@dm.uba.ar](mailto:jeronimo@dm.uba.ar)

Más información en el pdf a continuación.

# Modelos y soluciones para la restauración de imágenes fuera de foco

En este proyecto, comenzaremos viendo cómo se representan las imágenes digitales mediante vectores. Las imágenes digitales se pueden considerar como matrices bidimensionales de píxeles, donde cada píxel tiene un valor que representa su intensidad. Estas matrices pueden ser tratadas como vectores, lo que facilita su manipulación matemática y computacional.

Luego, formularemos el modelo matemático del proceso de desenfoque de imágenes [1, 6]. El desenfoque se puede modelar mediante una convolución entre la imagen original y una función de dispersión del punto (PSF, por sus siglas en inglés), que describe cómo un punto de luz se distribuye en la imagen. Matemáticamente, esto se expresa como  $g = h * f + n$ , donde  $g$  es la imagen desenfocada,  $h$  es la PSF,  $f$  es la imagen original y  $n$  es el ruido. El objetivo de la deconvolución es recuperar  $f$  a partir de  $g$  y  $h$ . Sin embargo, en muchos casos,  $h$  no es conocido, lo que conduce al problema de deconvolución ciega o semi-ciega. En la deconvolución ciega, tanto  $f$  como  $h$  deben estimarse a partir de  $g$ , mientras que en la deconvolución semi-ciega, se dispone de información parcial sobre  $h$ .

Estudiaremos algunos métodos estándar para resolver el problema de deconvolución, como el método de mínimos cuadrados y la regularización de Tikhonov. Estos métodos tratan de minimizar la diferencia entre la imagen desenfocada observada y la imagen reconstruida, al mismo tiempo que imponen restricciones para manejar el problema de la inestabilidad y el ruido. Luego, estudiaremos métodos iterativos para resolver problemas de mínimos cuadrado, y su aplicación al desenfoque de imágenes. Estos métodos iterativos permiten una convergencia más rápida.

El problema de deconvolución semi-ciega es especialmente complejo porque implica estimar simultáneamente la imagen original y ciertos parámetros del operador de desenfoque. Este problema se puede abordar mediante técnicas avanzadas de optimización no lineal, que buscan las mejores estimaciones para minimizar el error en la reconstrucción de la imagen.

Uno de los métodos más avanzados para tratar la deconvolución semi-ciega es el método de Proyección de Variables (Variable Projection Method) [5]. Este método descompone el problema en dos subproblemas más manejables: uno lineal y otro no lineal. Alternando entre la resolución de estos subproblemas, se pueden obtener soluciones más precisas y robustas.

En [4], se extendió el método de Proyección de Variables para problemas regularizados utilizando una matriz regularizante general. Asimismo, en [2], se amplió el método para incluir términos regularizantes con la norma  $p$ . La convergencia del método para problemas de grandes dimensiones fue estudiada en [3], demostrando su eficacia cuando se incluye un método iterativo.

En este proyecto, nos proponemos extender el método de Proyección de Variables

para abordar el problema de la deconvolución semi-ciega, añadiendo términos regularizantes a los parámetros del operador de desenfoque. Esta extensión permitirá mejorar la precisión y estabilidad de las estimaciones del operador de desenfoque, especialmente en presencia de ruido y otros factores perturbadores. Al incorporar estos términos regularizantes, buscamos desarrollar un enfoque más robusto y efectivo para la restauración de imágenes desenfocadas, contribuyendo así al avance en las técnicas de procesamiento de imágenes y resolución de problemas inversos.

En particular, nos vamos a concentrar en explotar las estructuras matriciales que surgen en los operadores de desenfoque para implementar soluciones de manera más eficiente [1, 6]. Estas estructuras, como las matrices de Toeplitz y circulares, permiten aprovechar propiedades específicas que facilitan cálculos más rápidos y precisos mediante el uso de la transformada de Fourier. Al identificar y utilizar estas características, podemos optimizar el procesamiento y mejorar significativamente la eficiencia computacional de los algoritmos de deconvolución. Incorporaremos estos resultados para obtener una implementación efectiva del método de Proyección de Variables.

## Referencias

- [1] David Austin, Malena I Español, and Mirjeta Pasha. The image deblurring problem: Matrices, wavelets, and multilevel methods. *Notices of the American Mathematical Society*, 69(8), 2022.
- [2] Malena Espanol and Mirjeta Pasha. An lp variable projection method for large-scale separable nonlinear inverse problems. *arXiv preprint arXiv:2105.14155*, 2021.
- [3] Malena I Español and Gabriela Jeronimo. Convergence analysis of a variable projection method for regularized separable nonlinear inverse problems. *arXiv preprint arXiv:2402.08568*, 2024.
- [4] Malena I Español and Mirjeta Pasha. Variable projection methods for separable nonlinear inverse problems with general-form Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 39(8):084002, 2023.
- [5] Gene H Golub and Victor Pereyra. The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whose variables separate. *SIAM Journal on numerical analysis*, 10(2):413–432, 1973.
- [6] Per Christian Hansen, James G Nagy, and Dianne P O’leary. *Deblurring images: matrices, spectra, and filtering*. SIAM, 2006.