LICENCIATURA EN CIENCIAS DE DATOS

Propuesta de tema de tesis

Algoritmos eficientes para problemas de clique máximo y de conjuntos independiente máximo en grafos monopolares y grafos unipolares

Se propone en esta tesis, resolver lo más eficientemente posible los problemas de clique máximo y conjunto independiente máximo tanto para la versión sin pesos como para la versión pesada (donde los nodos del grafo tienen pesos asignados) en las siguientes clases de grafos: los grafos monopolares, los grafos unipolares y las clases de grafos relacionadas con las anteriores (conocidas o nuevas a descubrir). Tanto los grafos monopolares como los grafos unipolares son grafos polares que a su vez es una generalización de clases de grafos clásicas de Teoría de Grafos como los grafos bipartitos y grafos split. Hay una diferencia computacionalmente importante entre los grafos monopolares y los grafos unipolares donde el problema del reconocimiento de los primeros es NP-Completo mientras para los segundos existe un algoritmo de tiempo cúbico para reconocerlos. Por ello, sería interesante desarrollar algoritmos robustos que resuelvan los problemas para los grafos monopolares sin saber que si el grafo de entrada es monopolar o no. O bien resuelve el problema en cuestión o bien se da cuenta que el grafo es inválido y en tal caso, ofrecer una evidencia (certificado).

Palabras clave: `grafos monopolares; grafos unipolares; clique máximo; conjunto independiente máximo`

Conocimientos deseables

Teoría y Algoritmos en grafos

¿Qué podría aprender quien realice esta tesis?

Aprenderá cómo realizar una investigación orientada a algorítmica en grafos

---

Dirección de la tesis

Lin, Min Chih
Departamento de Computación e Instituto de Cálculo

Contacto: *oscarlin@dc.uba.ar*

Más información en el pdf a continuación.

Algoritmos eficientes para problemas de clique máximo y de conjuntos independiente máximo en grafos monopolares y grafos unipolares

1 Objetivos

Tanto los grafos monopolares como los grafos unipolares son subclases de grafos bien conocidas de los grafos polares que a su vez es una generalización super conocida de los grafos split y de los grafos bipartitos. Estas últimas dos clases son de las más clásicas de Teoría de Grafos. Sin embargo, el problema de reconocer si un grafo es polar (*polaridad*) y el de reconocer si un grafo es monopolar (*monopolaridad*) son ambos NP-Completos. En cambio, existe un algoritmo de tiempo $O(n^3)$ para reconocer si un grafo de n vértices es unipolar o no. Dado un grafo, el problema de clique máximo consiste en hallar un subgrafo completo con mayor cantidad de vértices y el problema de conjunto independiente máximo es encontrar la mayor cantidad de vértices que no son adyacentes entre sí. Existen versiones pesadas de estos dos problemas: donde los vértices del grafo tienen pesos asignados y en lugar de maximizar la cantidad de vértices se pide que la suma de pesos de los vértices que conforman la solución sea la mayor posible. Los problemas de optimización mencionados son los más comunes de grafos y tienen aplicaciones múltiples. La propuesta de esta tesis es desarrollar algoritmos eficientes que resuelven estos problemas tanto para la versiones sin pesos como para las versiones pesadas (siempre que sea posible) para estas dos subclases de grafos polares y para las clases de grafos que están relacionadas (conocidas o nuevas a descubrir). Para el caso de grafos monopolares, sería ideal que los algoritmos a desarrollar sean robustos ya que no es posible reconocer si el grafo de entrada es monopolar en tiempo polinomial y exigir explícitamente que el grafo de entrada sea monopolar o más aún pedir una partición monopolar del grafo como entrada es poco práctico y muchas veces imposible computacionalmente. Un algoritmo robusto trata de resolver el problema aún para instancias no esperadas. En caso de no poder resolver el problema es porque la instancia es inválida y en este caso está bueno que el algoritmo pueda dar una evidencia (certificado) de esta invalidez.

2 Antecedentes y estado del arte

Los grafos polares fueron introducidos y estudiados en 1985 por Tyshkevich y Chernyak[7] como una generalización natural de grafos bipartitos y grafos split. Un grafo $G = (V, E)$ es polar si sus vértices admiten una partición polar. Una partición $V = A \cup B$ es polar si el subgrafo inducido $G[A]$ es multipartito completo y el subgrafo inducido $G[B]$ es cluster (cada componente conexa es completo). Claramente, si G es polar también lo es su complemento $\overline{G}$ (basta con invertir los roles de A y B). Chernyak y otros[2] mostraron en 1986 que polaridad es NP-Completo. Posteriormente, se realizaron múltiples estudios sobre polaridad restringiendo a subclases de grafos: grafos sin triángulos con grado a lo sumo 3 (NP-Completo[5]), cografos, grafos cordales, grafos de línea y grafos de permutación (polinomiales todas ellas) entre otras. Para el diseño del algoritmo de polaridad en subclases de grafos es común utilizar dos subclases de grafos polares: los grafos monopolares y los grafos unipolares. Un grafo es monopolar (unipolar, respectivamente) si admite una partición polar $V = A \cup B$ donde A es un conjunto independiente (induce un subgrafo completo, respectivamente). En general, se verifica primero si el grafo es unipolar en tiempo polinomial ($O(|V|^3)$ [4]), luego se fija si es monopolar aprovechando algunas propiedades particulares de la subclase en cuestión y el hecho del grafo no es unipolar y dejando para el final el caso donde el grafo no es unipolar ni monopolar. Monopolaridad fue probado que es NP-Completo en [6], inclusive para grafos sin triángulos con grado a lo sumo 3 [5]. Se creía que la dificultad de polaridad radicaba en monopolaridad, la cual fue desaprobada en [3] donde se mostró monopolaridad es polinomial para los grafos claw-free y polaridad sigue siendo NP-Completo para esta clase de grafos. El problema de conjunto independiente máximo es NP-Completo en grafos monopolares y por lo tanto lo es para grafos polares. Como el complemento de un grafo polar es polar entonces el problema de clique máximo es NP-Completo para grafos polares. El problema de máximo clique pesado se puede resolver en tiempo ($O(|V|^2|E| + |V||E|^2)$ para grafos monopolares [1] (donde se probó que la cantidad de cliques de un grafo es a lo sumo $O(|V|+|E|)$). En tanto, para los grafos unipolares, el problema de conjunto independiente máximo se puede resolver en tiempo lineal si la partición unipolar es dada como entrada y el problema de clique máximo se puede resolver en tiempo $O(\frac{|V|^{2.5}}{log\ |V|})$ nuevamente si la partición es dada como entrada. En caso de tener solamente el grafo como entrada, se debe correr primero el algoritmo de reconocimiento de tiempo $O(|V|^3)$ para hallar la partición unipolar. Todos estos algoritmos fueron presentados en [4]. Las versiones pesadas de estos problemas en esta clase se puede resolver en tiempo polinomial porque los grafos unipolares son perfectos. Sin embargo, los algoritmos para grafos perfectos son pocos eficientes.

References

[1] M. Barbato, D. Bezzi Monopolar graphs: Complexity of computing classical graph parameters Discrete Appl. Math. 291 (2021), pp. 277–285

[2] Z.A. Chernyak, A.A. Chernyak About recognizing (α, β) classes of polar graphs Discrete Math., 62 (1986), pp. 133–138

[3] R. Churchley, J. Huang On the polaridad and Monopolaridad of Graphs J. Graph Theory 76(2) (2014), pp. 138–148

[4] E.M. Eschen, X. Wang Algorithms for unipolar and generalized split graphs Discrete Applied Math. 162 (2014), pp. 195–201

[5] A. Farrugia Vertex-Partitioning into Fixed Additive Induced-Hereditary Properties is NP-hard Electron. J. Comb. 11(1) (2004)

[6] V.B. Le, R.Nevries Complexity and algorithms for recognizing polar and monopolar graphs Theoretical Computer Science 528 (2014), pp. 1–11

[7] R.I. Tyshkevich, A.A. Chernyak Decompositions of graphs Cybernet. Systems Anal. 21 (1985), pp. 231–242