LICENCIATURA EN CIENCIAS DE DATOS
Propuesta de tema de tesis

# Reconocer más eficientemente algunas clases de grafos hereditarias

*Una clase de grafos es hereditaria si todos los subgrafos inducidos de cualquier grafo miembro de la clase también son miembros. Se sabe que toda clase hereditaria tiene una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos. Por otro lado, para una clase no hereditaria X, se puede definir una subclase hereditaria de X llamada X hereditaria. Proponemos desarrollar en esta tesis algoritmos de reconocimiento más eficientes para algunas clases de grafos que poseen una caracterización por una cantidad finita de subgrafos inducidos prohibidos. Claramente, al ser una cantidad finita de subgrafos entonces existe un algoritmo trivial de complejidad temporal O(|V|^k) donde k es la cantidad de nodos del subgrafo prohibido con mayor cantidad de nodos y V es el conjunto de vértices del grafo a reconocer. Los algoritmos a desarrollar deben ser significativamente mejores que los triviales. Particularmente, vamos a considerar dos clases de grafos hereditarias como base: los grafos vecindad cerrada Helly hereditaria y los grafos vecindad abierta Helly hereditaria.*

Palabras clave: `clase hereditaria de grafos; subgrafo inducido; reconocimiento de grafos; algoritmo eficiente`

## Conocimientos deseables

*Teoría y Algoritmos en grafos*

## ¿Qué podría aprender quien realice esta tesis?

*Aprenderá cómo realizar una investigación orientada a algorítmica en grafos*

---

## Dirección de la tesis

*Lin, Min Chih*
*Departamento de Computación e Instituto de Cálculo*

Contacto: *oscarlin@dc.uba.ar*

Más información en el pdf a continuación.

# Reconocer más eficientemente algunas clases de grafos hereditarias

## 1 Objetivos

Una clase de grafos es hereditaria si todos los subgrafos inducidos de cualquier grafo miembro de la clase también son miembros. Se sabe que toda clase hereditaria tiene una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos y esa caracterización puede ser conocida o no (por ejemplo los grafos arco-circulares, los grafos polares, etc.). Además la cantidad de subgrafos inducidos prohibidos involucradas en la caracterización puede ser finita (por ejemplo los grafos split, los cografos, etc.) o infinita (por ejemplo los grafos cordales, los grafos bipartitos, los grafos perfectos, etc.). Por otro lado, para una clase no hereditaria $X$, se puede definir una subclase hereditaria de $X$ llamada $X$ hereditaria (por ejemplo los grafos clique-Helly hereditaria, los grafos Helly hereditaria, etc.). Proponemos desarrollar en esta tesis algoritmos de reconocimiento más eficientes para algunas clases de grafos que poseen una caracterización por una cantidad finita de subgrafos inducidos prohibidos. Claramente, al ser una cantidad finita de subgrafos entonces existe un algoritmo trivial de complejidad temporal $O(|V|^k)$ donde $k$ es la cantidad de nodos del subgrafo prohibido con mayor cantidad de nodos y $V$ es el conjunto de vértices del grafo a reconocer. Los algoritmos a desarrollar deben ser significativamente mejores que los triviales. Particularmente, vamos a considerar dos clases de grafos hereditarias como base: los grafos vecindad cerrada Helly hereditaria y los grafos vecindad abierta Helly hereditaria.

## 2 Antecedentes y estado del arte

Muchas de las clases de grafos clásicas tienen caracterizaciones por subgrafos inducidos prohibidos. A continuación damos algunos ejemplos de ellas.

- los grafos cordales son los grafos que no contienen ningún ciclo inducido $C_k$ con $k \geq 4$ como subgrafo inducido.
- los grafos bipartitos son los grafos que no contienen ningún ciclo inducido $C_{2k+1}$ con $k \geq 1$ como subgrafo inducido.
- los grafos perfectos son los grafos que no contienen ningún ciclo inducido $C_{2k+1}$ con $k \geq 2$ ni su complemento $\overline{C_{2k+1}}$ como subgrafo inducido.
- los grafos split son los grafos que no contienen $C_4$, $C_5$ ni $2K_2 = \overline{C_4}$ como subgrafo inducido.

- los cografos son los grafos que no contienen ningún $P_4$ (camino inducido de 4 nodos) como subgrafo inducido.

- los grafos cluster son los grafos que no contienen ningún $P_3$ (camino inducido de 3 nodos) como subgrafo inducido.

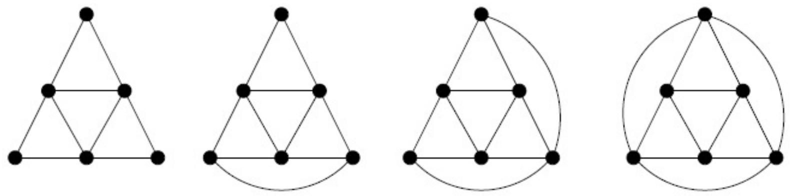
En muchos casos, las caracterizaciones no conducen a algoritmos de reconocimiento más eficientes. Esto es cierto inclusive para listas de subgrafos prohibidos acotadas. Existen algoritmos de tiempo lineal para reconocer a los grafos bipartitos, a los cografos y a los grafos cluster. Es más, de las clases mencionadas arriba, la única que no tiene reconocimiento lineal es la de grafos perfectos.

Hay varias clases de grafos que se definen usando la propiedad de Helly. Dada una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos, se dice $\mathcal{F}$ cumple la propiedad de Helly si para toda subfamilia $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ intersecante (cuando todo par de subconjuntos en $\mathcal{F}'$ tienen intersección no vacía) tiene intersección no vacía de todos los subconjuntos de $\mathcal{F}'$. Un grafo se dice clique Helly si la familia de todos los cliques (completos maximales) del grafo cumple la propiedad de Helly. Similarmente, un grafo es vecindad cerrada (abiertas) Helly si la familia de vecindades cerradas (abiertas) del grafo cumple la propiedad de Helly.

- los grafos clique Helly hereditaria son los grafos que no contienen a los grafos oculares como subgrafos inducidos [4] y el reconocimiento más eficiente cuesta $O(|E|^2)$ [3] donde $E$ es el conjunto de aristas del grafo a reconocer.

- los grafos vecindad cerrada Helly hereditaria son los grafos que no contienen a $C_4, C_5$ ni 3-sun como subgrafo inducido [2] y el mejor reconocimiento tiene complejidad $O(|V|^2|E|^2)$ [1] donde $V$ es el conjunto de vértices del grafo a reconocer.

- los grafos vecindad abierta Helly hereditaria son los grafos que no contienen a triángulo ni $C_6$ como subgrafo inducido[2] y el mejor reconocimiento tiene complejidad $O(|V|^2|E|^2)$ [1].



Los grafos oculares, primero de ellos se llama 3-sun

## References

[1] M.C. Dourado, F. Protti, J.L. Szwarcfiter Complexity aspects of the Helly property: Graphs and hypergraphs The Elec. J. of Combin. Dynamic Survey (2009)

[2] M. Groshaus, J.L. Szwarcfiter On hereditary Helly classes of graphs Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 10(1) (2008), pp. 71-–78

[3] M.C. Lin, J.L. Szwarcfiter Faster recognition of clique-Helly and hereditary clique-Helly graphs Information Processing Letters 103 (2007), pp. 40–43

[4] E. Prisner Hereditary clique-helly graphs J. Comb. Math. Comb. Comput 14 (1993), pp. 216–220