

Muestreo Compresivo de Señales

Antecedentes

Recientemente ha crecido el interés en el estudio de soluciones dispersas (*sparse*) de sistemas sobredeterminados de ecuaciones lineales debido a sus numerosas y potenciales aplicaciones. En particular, este tipo de soluciones pueden emplearse para describir señales e imágenes de forma compacta, siempre que uno esté dispuesto a aceptar una representación imperfecta.

Desarrollaremos este enfoque en el contexto de la teoría de muestreo y para problemas de compresión de imágenes y señales en general. Estos problemas surgen por diversas razones, incluyendo el volumen creciente de imágenes utilizadas en multimedia, que por ejemplo es omnipresente en el tráfico de Internet y otras aplicaciones vinculadas a las comunicaciones.

La idea básica es la siguiente. Supongamos que tenemos una matriz de rango completo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, donde $n < m$, y queremos encontrar soluciones de la ecuación

$$Ax = b, \tag{1}$$

donde b es una “señal” dada. Como la matriz A es de rango completo y hay más incógnitas que ecuaciones, existe un número infinito de soluciones para (1). ¿Qué ocurre si, entre todas las soluciones posibles, pudiéramos encontrar x_0 , la solución “más dispersa”, en el sentido de tener la menor cantidad de entradas no nulas?

Si el número de entradas no nulas en x_0 resulta ser menor que el número de entradas no nulas en b , entonces podríamos almacenar x_0 en lugar de b , logrando así una representación comprimida de la señal original b . El objetivo de esta propuesta es preparar el terreno para abordar rigurosamente las preguntas naturales que surgen de este enfoque.

Por ejemplo: ¿existe una solución “más dispersa” única para (1)? ¿Cómo se encuentra dicha solución? ¿Cuáles son las implicancias prácticas de este enfoque en la compresión de imágenes? ¿Cómo se integra la resolución de un problema de dispersidad dentro del contexto de las técnicas de compresión basadas en ciertas transformadas lineales? A modo de comparación, los estándares JPEG y JPEG 2000 utilizan transformaciones que permiten obtener distintas representaciones de la imagen original, las cuales pueden truncarse para obtener compresión a costa de un error aceptable [1, 2, 3].

Encontrando soluciones dispersas

Como ejemplo, presentamos el algoritmo *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP). Esta es una de las técnicas usadas para encontrar soluciones dispersas de sistemas de ecuaciones lineales como (1). Es uno de los algoritmos voraces (*greedy*) que buscan resolver el problema general

$$(P_0) \quad \min_x \|x\|_0 \quad \text{sujeto a } \|Ax - b\|_2 < \varepsilon, \quad (2)$$

donde

$$\|x\|_0 = \#\{j : |x_j| > 0\}$$

es la “norma cero” del vector x , que cuenta el número de entradas no nulas. Además, puede demostrarse que bajo ciertas condiciones existe una solución dispersa única para (P_0) y que, bajo esas mismas condiciones, el algoritmo OMP está en condiciones para encontrarla. Finalmente, y en general, OMP convergerá a una solución de (1).

Aplicaciones a la representación de señales e imágenes

Para implementar de manera práctica la idea de compresión descrita anteriormente, se puede seguir el enfoque usado en los estándares JPEG y similares. Asimismo, para evaluar estas técnicas de representación y compresión de imágenes (o similares), se puede seleccionar un conjunto de imágenes de prueba estándar utilizadas para la verificación empírica de esta clase de técnicas o algoritmos numéricos .

References

- [1] Y. Eldar, *Sampling Theory-Beyond Bandlimited Systems* , Cambridge, 2015.
- [2] S. Foucart, H. Rauhaut *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing* , Birkhäuser, ANHA Series, 2013.
- [3] A. Zayed, G. Schmeisser, *New Perspectives on Approximation and Sampling Theory*, Birkhäuser, ANHA Series, 2015.